ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика
Том 25, № 132 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-410-421
УДК 517.925

О дифференциальных уравнениях в банаховых алгебрах

Анатолий Иванович ПЕРОВ, Ирина Дмитриевна КОСТРУБ
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1

On differential equations in Banach algebras

Anatoly I. PEROV, Irina D. KOSTRUB
Voronezh State University
1 University Sq., Voronezh 394018, Russian Federation

Аннотация. Рассматриваются линейные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами в банаховых алгебрах (это есть прямое обобщение матричных дифференциальных уравнений высшего порядка). Изложение опирается на высшую алгебру, дифференциальные уравнения и функциональный анализ. Полученные результаты могут быть использованы при изучении матричных уравнений, в теории малых колебаний в физике и теории возмущений в квантовой механике. Изложение основано на оригинальных исследованиях авторов.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения высшего порядка; банаховы алгебры; теорема Сильвестра; тождество Гильберта; функция Коши; нерезонансное условие и частотные постоянные; ограниченная функция Грина и интегральные постоянные; некоммутативная формула Вьета

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732_а).

Для цитирования: *Перов А.И., Коструб И.Д.* О дифференциальных уравнениях в банаховых алгебрах // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 132. С. 410–421. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-410-421.

Abstract. We consider higher-order linear differential equations with constant coefficients in Banach algebras (this is a direct generalization of higher-order matrix differential equations). The presentation is based on higher algebra, differential equations and functional analysis. The results obtained can be used in the study of matrix equations, in the theory of small oscillations in physics, and in the theory of perturbations in quantum mechanics. The presentation is based on the original research of the authors.

Keywords: higher-order differential equations; Banach algebras; Sylvester's theorem; Hilbert identity; Cauchy function; non-resonant condition and frequency constants; bounded green function and integral constants; non-commutative Viet formula

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00732_a).

For citation: Perov A.I., Kostrub I.D. O differentsial'nykh uravneniyakh v banakhovykh algebrakh [On differential equations in Banach algebras]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 132, pp. 410–421. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-410-421. (In Russian, Abstr. in Engl.)

1. Однородные уравнения

В комплексной банаховой алгебре $\mathbb{B}$ [1] рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\mathbf{a}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{a}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{a}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{a}_n\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n$ из $\mathbb{B}$, причем $\mathbf{a}_0$ обратим. Такие уравнения возникают при изучении векторно-матричных дифференциальных уравнений [2] или дифференциальных уравнений высшего порядка в банаховых пространствах с ограниченными операторными коэффициентами [3]. Можно показать, что при любых $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, ..., \mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{c}_n$ из $\mathbb{B}$ уравнение (1.1) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}_1,\ \ \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{c}_2,\ \ \dots,\ \ \mathbf{x}^{(n-2)}(0) = \mathbf{c}_{n-1},\ \ \mathbf{x}^{(n-1)}(0) = \mathbf{c}_n,$$

и это решение определено при всех $t \in \mathbb{R}$.

Поставим в соответствие уравнению (1.1) скалярный характеристический многочлен

$$\mathbf{l}_n(\lambda) = \mathbf{a}_0\lambda^n + \mathbf{a}_1\lambda^{n-1} + ... + \mathbf{a}_{n-1}\lambda + \mathbf{a}_n,\ \ \mathbf{l}_n : \mathbb{C} \to \mathbb{B}. \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем скалярные (числовые) величины набираются обычным шрифтом, а элементы банаховой алгебры — полужирным.

Определение 1.1. Те $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых многочлен (1.2) обратим, образуют непустое неограниченное открытое множество $R \subseteq \mathbb{C}$; оно называется резольвентным множеством, а возникающая при этом функция $\mathbf{r}_n(\lambda) = \mathbf{l}_n^{-1}(\lambda)$, $\mathbf{r}_n : R \to \mathbb{B}$ — резольвентой n-го порядка [4].

Определение 1.2. Дополнение $S = \mathbb{C} \setminus R$ является непустым, ограниченным, замкнутым множеством и называется спектром многочлена.

Если по методу Эйлера искать решение уравнения (1.1) в виде $\exp(t\mathbf{\Lambda})$, где $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{B}$, то мы приходим к уравнению

$$\mathbf{l}_n(\mathbf{\Lambda}) = \mathbf{a}_0\mathbf{\Lambda}^n + \mathbf{a}_1\mathbf{\Lambda}^{n-1} + ... + \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{\Lambda} + \mathbf{a}_n = \mathbf{0}. \tag{1.3}$$

Отметим, что здесь $\mathbf{l}_n : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$.

Определение 1.3. Уравнение (1.3) называется характеристическим уравнением.

2. Теорема Сильвестра

Теорема 2.1. *Спектр любого корня* $\mathbf{\Lambda}$ *уравнения* (1.3) *содержится в спектре скалярного характеристического многочлена*

$$S(\mathbf{\Lambda}) \subseteq S. \tag{2.1}$$

Доказательство. Доказательство проведем для коммутативного случая. Пусть $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{B}$ корень уравнения (1.3) и μ из резольвентного множества R. Выпишем

$$\mathbf{l}_n(\mathbf{\Lambda}) - \mathbf{l}_n(\mu) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}_{n-j}\mathbf{\Lambda}^j - \sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}_{n-j}\mu^j = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}_{n-j}(\mathbf{\Lambda}^j - \mu^j).$$

Так как $\mathbf{\Lambda}$ и μ коммутируют, то

$$\mathbf{l}_n(\mathbf{\Lambda}) - \mathbf{l}_n(\mu) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{n-j}(\mathbf{\Lambda}^j - \mu^j) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{n-j}(\mathbf{\Lambda}^{j-1} + \mathbf{\Lambda}^{j-2}\mu + ... + \mathbf{\Lambda}\mu^{n-2} + \mu^{n-1})(\mathbf{\Lambda} - \mu).$$

Поскольку левая часть является обратимой, ибо $\mathbf{l}_n(\mathbf{\Lambda}) = 0$, а $\mu \in R$, то элемент $(\mathbf{\Lambda} - \mu)$ обратим, и значит, $R \subseteq R(\mathbf{\Lambda})$ (в коммутативном случае из обратимости произведения вытекает обратимость его сомножителей). Поэтому $S(\mathbf{\Lambda}) \subseteq S$, и включение (2.1) установлено. Здесь $S(\mathbf{\Lambda})$ — это спектр элемента $\mathbf{\Lambda}$, а $R(\mathbf{\Lambda}) = \mathbb{C} \setminus S(\mathbf{\Lambda})$. □

Доказательство теоремы в общем случае сопряжено с некоторыми дополнительными трудностями и будет опубликовано позже. Для матричного уравнения теорема 2.1 была доказана Сильвестром.

3. Тождество Гильберта

Пусть $\lambda, \mu \in R$. Так как

$$\mathbf{r}_n(\lambda) - \mathbf{r}_n(\mu) = \mathbf{r}_n(\lambda)\{\mathbf{r}_n^{-1}(\mu) - \mathbf{r}_n^{-1}(\lambda)\}\mathbf{r}_n(\mu)$$

$$= \mathbf{r}_n(\lambda)\left\{\sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}_{n-j}\mu^j - \sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}_{n-j}\lambda^j\right\}\mathbf{r}_n(\mu) = \mathbf{r}_n(\lambda)\left\{\sum_{j=0}^{n} \mathbf{a}_{n-j}(\mu^j - \lambda^j)\right\}\mathbf{r}_n(\mu)$$

$$= \mathbf{r}_n(\lambda)\left\{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{n-j}(\mu - \lambda)(\mu^{j-1} + \mu^{j-2}\lambda + ... + \mu\lambda^{j-2} + \lambda^{j-1})\right\}\mathbf{r}_n(\mu),$$

то

$$\mathbf{r}_n(\lambda) - \mathbf{r}_n(\mu) = (\mu - \lambda)\mathbf{r}_n(\lambda)\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{n-j}(\mu^{j-1} + \mu^{j-2}\lambda + ... + \mu\lambda^{j-2} + \lambda^{j-1})\mathbf{r}_n(\mu). \tag{3.1}$$

При $n = 1$ соотношение (3.1) хорошо известно и называется *тождеством Гильберта* [5]; мы сохраним за ним это название и в случае произвольного n.

Из (3.1) вытекает, что резольвента $\mathbf{r}_n(\lambda)$ является на R аналитической функцией, причем, она представляет собой решение нелинейного дифференциального уравнения типа Риккати

$$\mathbf{r}_n'(\lambda) = -\mathbf{r}_n(\lambda)\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{n-j} j \lambda^{j-1}\right)\mathbf{r}_n(\lambda) \ \ (\lambda \in R).$$

4. Функция Коши

О п р е д е л е н и е 4.1. Решение $\mathbf{k}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\mathbf{k}(0) = \mathbf{0}, \ \dot{\mathbf{k}}(0) = \mathbf{0}, \ \ldots, \ \mathbf{k}^{(n-2)}(0) = \mathbf{0}, \ \mathbf{k}^{(n-1)}(0) = \mathbf{a}_0^{-1}, \tag{4.1}$$

называется функцией Коши.

Приведем различные формулы этого решения. Прежде всего отметим, что имеет место формула разложения в степенной ряд

$$(\mathbf{a}_0+\mathbf{a}_1\mu+...+\mathbf{a}_{n-1}\mu^{n-1}+\mathbf{a}_n\mu^n)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{c}_k\mu^k \ \ (|\mu|<\rho), \tag{4.2}$$

где ρ $(0<\rho<\infty)$ радиус сходимости написанного степенного ряда. При $\mu=0$ мы получаем, что $\mathbf{c}_0=\mathbf{a}_0^{-1}$. Приведем формулу для остальных коэффициентов этого разложения.

$$\mathbf{c}_k=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{\substack{1\le i_1\le n,...,1\le i_p\le n,\\ k_1\ge 0,...,k_p\ge 0,\\ i_1k_1+...+i_pk_p=k}}(-1)^{k_1+...+k_p}(\mathbf{a}_0^{-1}\mathbf{a}_{i_1})^{k_1}...(\mathbf{a}_0^{-1}\mathbf{a}_{i_p})^{k_p}\mathbf{a}_0^{-1}. \tag{4.3}$$

Здесь порядок сомножителей весьма важен (среди чисел $i_1,...,i_p$ могут быть повторяющиеся). Имеем

$$\mathbf{c}_1=-\mathbf{a}_0^{-1}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0^{-1}, \ \ \mathbf{c}_2=(\mathbf{a}_0^{-1}\mathbf{a}_1)^2\mathbf{a}_0^{-1}-\mathbf{a}_0^{-1}\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0^{-1}.$$

Если банахова алгебра $\mathbb{B}$ является коммутативной, то формула (4.3) принимает более прозрачный вид

$$\mathbf{c}_k=\sum_{\substack{0\le k_1,...,0\le k_n,\\ 1k_1+...+nk_n=k}}(-1)^{k_1+...+k_n}\frac{(k_1+...+k_n)!}{k_1!...k_n!}(\mathbf{a}_0^{-1}\mathbf{a}_1)^{k_1}...(\mathbf{a}_0^{-1}\mathbf{a}_n)^{k_n}\mathbf{a}_0^{-1}.$$

Важность разложения (4.2) заключается в том, что оно позволяет написать разложение для резольвенты n-го порядка в ряд по обратным степеням параметра λ.

$$\mathbf{r}_n(\lambda)=(\mathbf{a}_0\lambda^n+\mathbf{a}_1\lambda^{n-1}+...+\mathbf{a}_n)^{-1}=\lambda^{-n}(\mathbf{a}_0+\mathbf{a}_1\mu+...+\mathbf{a}_n\mu^n)^{-1}$$

$$=\lambda^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{c}_k\mu^k=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{c}_k\lambda^{-(n+k)}.$$

Мы считаем, что $\lambda\ne 0$ и $\mu=1/\lambda$. Поэтому

$$\mathbf{r}_n(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{c}_k\lambda^{-(n+k)} \ \ (|\lambda|>1/\rho). \tag{4.4}$$

Нетрудно убедиться в том, что функция Коши допускает представление в виде степенного ряда

$$\mathbf{k}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{c}_k\frac{t^{n+k-1}}{(n+k-1)!} \ \ (-\infty<t<+\infty).$$

Начальные условия (4.1) выполнены очевидным образом, а для проверки того, что $\mathbf{k}(t)$ удовлетворяет (1.1), нужно использовать соотношения:

$$\sum_{j=0}^{p}\mathbf{a}_j\mathbf{c}_{p-j}=0 \ \ (p=0,1,...)$$

(считая, что $\mathbf{a}_j = 0$ при $p > n$), которые вытекают из тождества в силу (4.2)

$$\mathbf{1} = (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1\mu + ... + \mathbf{a}_n\mu^n)\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{a}_k\mu^k \quad (|\mu| < \rho).$$

Функция Коши может быть представлена в виде контурного интеграла

$$\mathbf{k}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\sigma} e^{t\lambda}\mathbf{r}_n(\lambda)d\lambda. \tag{4.5}$$

Здесь контур $\partial\sigma$ лежит в некотором открытом множестве, целиком содержащимся в резольвентном множестве R и окружающим спектр S скалярного характеристического многочлена $\mathbf{l}_n(\lambda)$ [1].

Проверим справедливость формулы (4.5). Так как

$$\mathbf{k}^{(j)}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\sigma} e^{t\lambda}\lambda^j\mathbf{r}_n(\lambda)d\lambda \quad (0 \le j \le n),$$

то

$$\sum_{j=0}^{n}\mathbf{a}_{n-j}\mathbf{k}^{(j)}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\sigma} e^{t\lambda}\mathbf{l}_n(\lambda)\mathbf{r}_n(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\sigma} e^{t\lambda}\mathbf{1}d\lambda = \mathbf{0},$$

и $\mathbf{k}(t)$ является решением дифференциального уравнения (1.1). Так как

$$\mathbf{k}^{(j)}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\sigma} \lambda^j\mathbf{r}_n(\lambda)d\lambda \quad (0 \le j \le n-1),$$

то согласно формуле (4.4) для резольвенты n-го порядка выполнены начальные условия (4.1) (мы воспользовались тем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\sigma} \lambda^{j-n}d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \le j \le n-2, \\ 1 & \text{при} \quad j = n-1, \end{cases}$$

если контур $\partial\sigma$ окружает 0).

В простейшем случае, когда в роли банаховой алгебры $\mathbb{B}$ выступает поле $\mathbb{C}$, формула (4.5) принимает вид

$$k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\sigma} \frac{e^{t\lambda}}{a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n}d\lambda. \tag{4.6}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ корни характеристического уравнения (1.3), которые по предположению попарно различные. Тогда формула (4.6) принимает вид

$$k(t) = \frac{1}{a_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\sigma} \frac{e^{t\lambda}}{(\lambda-\lambda_1)...(\lambda-\lambda_n)}d\lambda$$

$$= \frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{t\lambda_j}}{(\lambda_j-\lambda_1)...(\lambda_j-\lambda_{j-1})(\lambda_j-\lambda_{j+1})...(\lambda_j-\lambda_n)}.$$

Последняя сумма представляет собой разделенную разность порядка $(n-1)$, построенную для функции $\exp(t\lambda)$ по узлам $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ [6].

Вернемся к общему случаю. Пусть $\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2, ..., \mathbf{\Lambda}_n$ попарно различные корни характеристического уравнения (1.3), причем разности $(\mathbf{\Lambda}_j - \mathbf{\Lambda}_k)$ обратимы при $j \neq k$. Предполагая, что банахова алгебра $\mathbb{B}$ коммутативна, приведем еще одну формулу для функции Коши

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{a}_0^{-1} \sum_{j=1}^{n} e^{t\mathbf{\Lambda}_j} \prod_{\substack{k \neq j, \\ 1 \leq k \leq n}} (\mathbf{\Lambda}_j - \mathbf{\Lambda}_k)^{-1}.$$

5. Неоднородные уравнения

В комплексной банаховой алгебре $\mathbb{B}$ рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\mathbf{a}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{a}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{a}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{a}_n\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \tag{5.1}$$

при прежних предположениях относительно коэффициентов, где $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ есть непрерывная ограниченная функция; последнее означает, что

$$||\mathbf{f}(t)|| \leq \mathbf{c}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Можно показать, что уравнение (5.1) при любых начальных условиях

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}_1, \ \ \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{c}_2, \ \ \ldots, \ \ \mathbf{x}^{(n-2)}(0) = \mathbf{c}_{n-1}, \ \ \mathbf{x}^{(n-1)}(0) = \mathbf{c}_n,$$

имеет единственное решение, и это решение определено при всех t. Нас интересуют условия, при выполнении которых уравнение (5.1) при любой непрерывной ограниченной функции $\mathbf{f}(t)$ имеет единственное ограниченное решение $\mathbf{x}(t)$. В этом случае согласно лемме Эсклангона [7] все производные $\mathbf{x}^{(j)}(t)$ вплоть до n-го порядка включительно будут ограниченными.

6. Нерезонансное условие и частотные постоянные

О п р е д е л е н и е 6.1. Мы скажем, что выполнено нерезонансное условие, если $\mathbf{l}_n(i\theta)$ обратим при всех вещественных θ $(-\infty < \theta < +\infty)$, т. е. спектр S скалярного характеристического многочлена $\mathbf{l}_n(\lambda)$ не пересекается с мнимой осью

$$S \bigcap i\mathbb{R} = \emptyset. \tag{6.1}$$

О п р е д е л е н и е 6.2. При выполнении нерезонансного условия резольвента n-го порядка $\mathbf{r}_n(i\theta)$ определяется при всех θ $(-\infty < \theta < +\infty)$ и называется частотной характеристикой.

В силу формулы (4.4) имеем

$$||\mathbf{r}_n(i\theta)|| \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||\mathbf{c}_k|| |\theta|^{-(n+k)} \quad \left(|\theta| > \frac{1}{\rho}\right).$$

Мы видим, что

$$||\mathbf{r}_n(i\theta)|| = O(|\theta|^{-n}). \tag{6.2}$$

О п р е д е л е н и е 6.3. Введем частотные постоянные, положив

$$\begin{cases} \sigma_j = \max\limits_{-\infty<\theta<+\infty} ||(i\theta)^j \mathbf{r}_n(i\theta)||, & 0 \le j \le n-1, \\ \sigma_n = \sup\limits_{-\infty<\theta<+\infty} ||(i\theta)^n \mathbf{r}_n(i\theta)||, & j = n. \end{cases} \tag{6.3}$$

О п р е д е л е н и е 6.4. Функция $(i\theta)^j \mathbf{r}_n(i\theta) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ называется j-й частотной характеристикой $(0 \le j \le n)$.

Из формулы (6.3) вытекает, что

$$||(i\theta)^j \mathbf{r}_n(i\theta)|| \le \sigma_j \ \ (-\infty < \theta < +\infty, \ \ 0 \le j \le n), \tag{6.4}$$

причем выписанные константы являются наилучшими.

Последовательность положительных частотных постоянных является логарифмически выпуклой, т. е.

$$\sigma_j^2 \le \sigma_{j-1} \cdot \sigma_{j+1} \ \ (1 \le j \le n-1). \tag{6.5}$$

Действительно, так как в силу (6.4)

$$||(i\theta)^j \mathbf{r}_n(i\theta)||^2 = ||(i\theta)^{j-1} \mathbf{r}_n(i\theta)|| \cdot ||(i\theta)^{j+1} \mathbf{r}_n(i\theta)|| \le \sigma_{j-1} \cdot \sigma_{j+1},$$

то переходя к максимуму по θ в левой части этой оценки, получаем неравенство (6.5).

Роль нерезонансного условия демонстрирует приводимая ниже теорема.

Теорема 6.1. *Для того, чтобы уравнение* (5.1) *при любой непрерывной ограниченной функции* $\mathbf{f}(t)$ *имело единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$, *необходимо и достаточно чтобы выполнялось нерезонансное условие* (6.1).

7. Ограниченная функция Грина и интегральные постоянные

О п р е д е л е н и е 7.1. Функция $\mathbf{g}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ называется функцией Грина задачи об ограниченных решениях для уравнения (5.1), если она позволяет записывать единственное ограниченное решение этого уравнения в виде

$$\mathbf{x}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(t-s)\mathbf{f}(s)ds.$$

Известно, что $\mathbf{g}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ является ограниченной функцией Грина в том и только в том случае, если выполнены условия (см., например, [2]):

1) при $t \ne 0$ она является решением однородного дифференциального уравнения n-го порядка

$$\mathbf{a}_0\mathbf{g}^{(n)} + \mathbf{a}_1\mathbf{g}^{(n-1)} + \ldots + \mathbf{a}_{n-1}\dot{\mathbf{g}} + \mathbf{a}_n\mathbf{g} = 0;$$

2) производные $\mathbf{g}(t), \dot{\mathbf{g}}(t), ..., \mathbf{g}^{(n-2)}(t)$ непрерывны в нуле, а производная $\mathbf{g}^{(n-1)}(t)$ терпит разрыв

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}^{(j)}(+0) - \mathbf{g}^{(j)}(-0) = 0, && 0 \le j \le n-2; \\ &\mathbf{g}^{(n-1)}(+0) - \mathbf{g}^{(n-1)}(-0) = \mathbf{a}_0^{-1}; \end{aligned}$$

3) существуют такие постоянные $M > 0$ и $\gamma > 0$, что справедливы оценки

$$\|\mathbf{g}^{(j)}(t)\| \le M e^{-\gamma|t|}, \ \ -\infty < t < +\infty, \ \ 0 \le j \le n. \tag{7.1}$$

С помощью ограниченной функции Грина ограниченное решение уравнения (5.1) и его производные допускают представление в виде несобственных интегралов типа свертки

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{(j)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds, && 0 \le j \le n-1; \\ &\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{a}_0^{-1}\mathbf{f}(t) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^{(n)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Оценки (7.1) говорят о том, что все написанные интегралы абсолютно сходятся.

О п р е д е л е н и е 7.2. Введем интегральные постоянные, положив

$$\begin{cases} æ_j = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ||\mathbf{g}^{(j)}(t)||(t)ds, & 0 \le j \le n-1; \\ æ_n = ||\mathbf{a}_0^{-1}|| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ||\mathbf{g}^{(n)}(t)||dt. \end{cases}$$

Значение интегральных постоянных заключается в том, что они позволяют оценивать норму ограниченного решения и его производных

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_C \le æ_j||\mathbf{f}||_C, \ \ 0 \le j \le n. \tag{7.3}$$

Пусть $0 \le j \le n-1$. Тогда согласно (7.2) имеем

$$||\mathbf{x}^{(j)}(t)|| = \left\| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds \right\| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ||\mathbf{g}^{(j)}(t-s)||||\mathbf{f}(s)||ds$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ||\mathbf{g}^{(j)}(t-s)||ds||\mathbf{f}||_C = æ_j||\mathbf{f}||_C.$$

Мы воспользовались тем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ||\mathbf{g}^{(j)}(t-s)||ds = \left| \begin{array}{c} t-s=\sigma \\ -ds = d\sigma \end{array} \right| = \int\limits_{+\infty}^{-\infty} ||\mathbf{g}^{(j)}(\sigma)||(-d\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ||\mathbf{g}^{(j)}(\sigma)||d\sigma = æ_j.$$

Оценка (7.3) при $0 \le j \le n-1$ установлена.

При $j = n$ согласно (7.2) имеем

$$||\mathbf{x}^{(n)}(t)|| = ||\mathbf{a}_0^{-1}\mathbf{f}(t) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^{(n)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds||$$

$$\le ||\mathbf{a}_0^{-1}\mathbf{f}(t)|| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ||\mathbf{g}^{(n)}(t-s)||||\mathbf{f}(s)||ds \le ||\mathbf{a}_0^{-1}||||\mathbf{f}||_C + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ||\mathbf{g}^{(n)}(t-s)||ds||\mathbf{f}||_C$$

$$= \left(||\mathbf{a}_0^{-1}|| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ||\mathbf{g}^{(n)}(t-s)||ds \right) ||\mathbf{f}||_C.$$

Оценка (7.3) установлена при $j = n$.

Для ограниченной функции Грина можно дать представление в виде контурного интеграла [8]

$$\mathbf{g}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\sigma_-} e^{t\lambda}\mathbf{r}_n(\lambda)d\lambda, & t > 0, \\ -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\sigma_+} e^{t\lambda}\mathbf{r}_n(\lambda)d\lambda, & t < 0. \end{cases} \tag{7.4}$$

Здесь $\partial\sigma_-(\partial\sigma_+)$ есть контур, лежащий в левой (правой) открытой полуплоскости в резольвентном множестве R и окружающий часть спектра многочлена $\mathbf{l}_n(\lambda)$, лежащую в открытой левой (правой) полуплоскости. Если многочлен $\mathbf{l}_n(\lambda)$ гурвицев, т. е. весь его спектр лежит в открытой левой полуплоскости, то интеграл во второй строке формулы (7.4) должен быть заменен нулем. Аналогично поступаем, если спектр лежит в открытой правой полуплоскости.

8. Сравнение частотных и интегральных постоянных

Теорема 8.1. *Справедлива формула*

$$\sigma_j \le æ_j, \ \ 0 \le j \le n. \tag{8.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В основе доказательства лежат формулы

$$\begin{aligned} &(i\theta)^j\mathbf{r}_n(i\theta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^{(j)}(t)e^{-i\theta t}dt, && 0 \le j \le n-1, \\ &(i\theta)^n\mathbf{r}_n(i\theta) = \mathbf{a}_0^{-1} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^{(n)}(t)e^{-i\theta t}dt, && j = n, \end{aligned} \tag{8.2}$$

означающие, что преобразование Фурье j-й производной ограниченной функции Грина совпадает с j-й частотной характеристикой.

Пусть $0 \le j \le n-1$. Тогда согласно первой строке формулы (8.2) имеем

$$||(i\theta)^j\mathbf{r}_n(i\theta)|| = \left\|\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^{(j)}(t)e^{-i\theta t}dt\right\| \le \int_{-\infty}^{+\infty} ||\mathbf{g}^{(j)}(t)||dt = æ_j.$$

Переходя к максимуму в левой части неравенства, получаем

$$\sigma_j \le æ_j, \ \ 0 \le j \le n-1.$$

Пусть $j = n$. Тогда согласно второй строке формулы (8.2) имеем

$$||(i\theta)^n\mathbf{r}_n(i\theta)|| = \left\|\mathbf{a}_0^{-1} + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^{(n)}(t)e^{-i\theta t}dt\right\| \le ||\mathbf{a}_0^{-1}|| + \int_{-\infty}^{+\infty} ||\mathbf{g}^{(n)}(t)||dt = æ_n.$$

Переходя к супремуму в левой части неравенства, получаем

$$\sigma_n \le æ_n.$$

$\square$

Формула (8.2) при $j=0$ принимает вид

$$\mathbf{r}_n(i\theta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{g}(t)e^{-i\theta t}dt. \tag{8.3}$$

Эта формула легко устанавливается. Она означает, что преобразование Фурье ограниченной функции Грина совпадает с частотной характеристикой. Поэтому сама ограниченная функция Грина в свою очередь является обратным преобразованием Фурье [9]

$$\mathbf{g}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{r}_n(i\theta)e^{it\theta}d\theta.$$

В силу написанной выше оценки (6.2) для резольвенты n-го все написанные оценки для интегралов сходятся при $n\geq 2$. Из (8.3) интегрированием по частям (при $\theta\neq 0$) получаем

$$\mathbf{r}_n(i\theta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{g}(t)e^{-i\theta t}dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{g}(t)d\left(\frac{e^{-i\theta t}}{-i\theta}\right)$$

$$=\mathbf{g}(t)\frac{e^{-i\theta t}}{-i\theta}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dot{\mathbf{g}}(t)\frac{e^{-i\theta t}}{-i\theta}dt=0+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dot{\mathbf{g}}_n(t)\frac{e^{-i\theta t}}{i\theta}dt.$$

Поэтому

$$(i\theta)\mathbf{r}_n(i\theta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dot{\mathbf{g}}(t)e^{-i\theta t}dt.$$

Повторяя высказанные выше рассуждения, получаем, что j-я производная ограниченной функции Грина является обратным преобразованием Фурье j-й частотной характеристики

$$\mathbf{g}^{(j)}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{r}_n(i\theta)(it\theta)^j e^{it\theta}d\theta,\ \ 0\leq j\leq n-1,$$

с гарантией это верно при $0\leq j\leq n-2$.

Для конечномерной банаховой алгебры $\mathbb{B}$ оценки (8.1) могут быть уточнены, а именно (см. [2]):

$$\sigma_0\leq æ_0\ \text{ и }\ \sigma_j<æ_j,\ \ 1\leq j\leq n.$$

Мы ввели интегральные постоянные $æ_j$ и показали как они участвуют в оценке ограниченного решения и его производных (7.3). Теперь посмотрим, как в аналогичной ситуации используются частотные постоянные σ_j.

Рассмотрим почти периодическую функцию $\mathbf{f}(t)$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье

$$\mathbf{f}(t)\sim\sum_j\mathbf{f}_j e^{i\theta_j t}$$

($\mathbf{f}_j$ из банаховой алгебры $\mathbb{B}$). Если ввести норму

$$\vert\!\vert\!\vert\,\mathbf{f}\,\vert\!\vert\!\vert=\sum_k||\mathbf{f}_k||,$$

то получим банахово пространство P. В описываемой нами ситуации уравнение (5.1) имеет единственное почти периодическое решение $\mathbf{x}(t)$, и ряд Фурье этого решения абсолютно сходится

$$\mathbf{x}(t) = \sum_k \mathbf{x}_k e^{i\theta_k t}, \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{r}(i\theta_k)\mathbf{f}_k,$$

поэтому

$$||\mathbf{x}|| \le \sigma_0 |||\,\mathbf{f}\,|||.$$

Аналогично, так как

$$\mathbf{x}^{(j)}(t) = \sum_k \mathbf{x}_k e^{i\theta_k t}(i\theta_k)^j,$$

то

$$|||\,\mathbf{x}^{(j)}\,||| = \sum_k ||\mathbf{x}_k(i\theta_k)^j = \sum_k ||\mathbf{r}_n(i\theta_k)(i\theta_k)^j\mathbf{f}_k||$$
$$\le \sum_k ||\mathbf{r}_n(i\theta_k)(i\theta_k)^j||\,||\mathbf{f}_k|| \le \sigma_j |||\,\mathbf{f}\,|||, \quad \text{где} \ \ 1 \le j \le n.$$

References

[1] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975; англ. пер.:W. Rudin, *Functional Analysis*, McGRAW-HILL book company, New York–San-Francisco–Toronto–London, 1973.

[2] А. И. Перов, И. Д. Коструб, “Об ограниченных решениях слабо нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка”, *Сиб. матем. журн.*, **57**:4 (2016), 830-849; англ. пер.:A. I. Perov, I. D. Kostrub, “On bounded solutions to weakly nonlinear vector-matrix differential equations of order n”, *Siberian Math. J.*, **57**:4 (2016), 650–665.

[3] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, М., Наука, 1970. [Yu. L. Daletsky, M. G. Crane, *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*, Nauka publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

[4] V. G. Kurbatov, I. V. Kurbatova, “Computation of Green’s Function of the Bounded Solutions Problem”, *Comput. Methods Appl. Math.*, 2017.

[5] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, М., ИЛ, 1962; англ. пер.:E. Hille, R. Phillips, *Functional Analysis and Semigroups*, American Mathematical Society, USA, 1957.

[6] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, М., Физматлит, 1959. [A. O. Gel’fond, *Calculus of Finite Differences*, Moscow, Fizmatlit, 1959 (In Russian)].

[7] М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, *Нелинейные почти периодические колебания*, М., Наука, 1970. [M. A. Krasnoselsky, V. Sh. Burd, Yu. S. Kolesov, *Nonlinear Almost Periodic Oscillations*, Nauka Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

[8] В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова, “Вычислительные методы спектральной теории”, *Comput. Methods Appl. Math.*, 2019. [V. G. Kurbatov, I. V. Kurbatova, *Computational Methods of Spectral Theory*, Publishing House of VSU, Voronezh, 2019 (In Russian)].

[9] С. Бохнер, *Лекции об интегралах Фурье*, М., Физматлит, 1962; англ. пер.:S. Bochner, *Lectures on Fourier Integrals*, Princeton Uversity Press, Princeton, 1959.

Информация об авторах

Перов Анатолий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и управления. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: anperov@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5198-1115

Information about the authors

Anatoly I. Perov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the System Analysis and Management Department. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation.

E-mail: anperov@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5198-1115

Коструб Ирина Дмитриевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и управления. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: ikostrub@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5636-5071

Irina D. Kostrub, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the System Analysis and Management Department. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation.
E-mail: ikostrub@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5636-5071

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:
Коструб Ирина Дмитриевна
E-mail: ikostrub@yandex.ru

Corresponding author:
Irina D. Kostrub
E-mail: ikostrub@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.05.2020 г.
Поступила после рецензирования 18.07.2020 г.
Принята к публикации 19.11.2020 г.

Received 21.05.2020
Reviewed 18.07.2020
Accepted for press 19.11.2020